Análise Matemática II

**Atividade 02 – PVI**

Ana Cristina Justo Baptista Pereira – 21260300  
Inês Beatriz Fernandes Moutinho dos Santos – 21260295  
Nuno Filipe Mortágua da Silva Rocha – 21240505

# 1. Introdução

Este trabalho foi realizado no âmbito da Unidade Curricular de Analise Matemática II e pretende-se que os alunos se familiarizem com a linguagem do MATLAB e também com os métodos para a resolução de equações diferencias ordinárias, ambos essenciais para a aprovação à Unidade Curricular de Analise Matemática II da Licenciatura de Engenharia Informática do Instituto Superior de Engenharia de Coimbra.

Iremos apresentar a nossa interpretação do enunciado, uma breve explicação sobre o que é PVI, os vários métodos e respetivas fórmulas que iremos usar para resolver este e por fim, apresentar o seu algoritmo e função feito no MATLAB.

Será feita uma breve explicação sobre função do Matlab ODE45 e as suas aplicações neste tipo de problemas com alguns exemplos de aplicação e testes destes métodos analisados anteriormente.

No capítulo III, será apresentado uma resolução do exercício 4 do Teste A 2015/2016, exemplos de output, nomeadamente gráficos e respetiva tabela, problema de aplicação, cujo autor é Dennis G. Zill com a sua respetiva Modelação matemática do problema e resolução através da aplicação criada.

## Enunciado da actividade proposta e interpretação do mesmo

Nesta atividade é pedido aos alunos o desenvolvimento de um programa que além de resolver uma equação diferencial, dado o seu problema de valor inicial (PVI), deve possuir uma interface gráfica intuitiva facilitando a compreensão do utilizador.

Primeiramente o utilizador deve introduzir um PVI, neste caso o problema apresentado pelo autor Dennis G. Zil e escolher de que forma pretende calculá-lo escolhendo um dos diferentes métodos Numéricos - Método de Euler, de RK2, RK4 ou melhorado – e apresentando por fim a sua Modelação matemática e resolução através da aplicação criada.

## Definição de PVI

Seja y uma função de x e n um número inteiro positivo, então uma relação de igualdade que envolva x, y, y’, y’’,...,y(n) é chamada uma equação diferencial ordinária.

Uma função f é solução de uma equação diferencial se a substituição de y por f resulta em uma identidade para todo x em algum intervalo. Às vezes, impõem-se condições iniciais (PVI) que determinam uma solução particular.

Associados a y(n) = f(x, y’, y’’,...,y(n-1)), podem existir condições cujo número coincide com a ordem da equação diferencial ordinária. Se tais condições se referem a um único x, tem-se um problema de valor inicial ⎯ PVI.

# 2. Métodos Numéricos para resolução de PVI

Para um determinado PVI é possível obter um resultado mais ou menos preciso da equação diferencial ordinária dada, entre eles temos o método de Euler, método cuja aproximação à solução exata é reduzida, o método de Runge-Kutta de Ordem 2 cuja aproximação à solução exata é maior do que a do método de Euler e, por fim, o método de Runge-Kutta de ordem 4, o método que produz soluções mais aproximadas à solução original. Todos estes métodos podem obter aproximações mais ou menos precisas consoante o número de iterações desejadas.

Dado um problema de valor inicial:

Faz-se a discretização de t - Partição regular do intervalo

## 2.1 Método de Euler

Em matemática e ciência computacional, o método de Euler, cujo nome relaciona-se com Leonhard Euler, é um método numérico de primeira ordem para solucionar equações diferenciais ordinárias com um valor inicial dado. É o tipo mais básico de método explícito para integração numérica de equações diferenciais ordinárias.

### 2.1.1 Fórmulas

Para calcular o método de Euler usamos a seguinte formula:

Onde toma os valores obtidos através da discretização de t.

### 2.1.2 Algoritmo/Função

**Algoritmo:**

INPUT: f,a,b,n,

OUTPUT: y

t= a:h:b;

y(1)=;

for i=1:n

𝑦(𝑖 + 1) = 𝑦(𝑖) + ℎ ∗ 𝑓(𝑡(𝑖), 𝑦(𝑖));

End

**Função:**

function

for

end

## 2.2 Método de Euler Melhorado ou Modificado

O método de Euler melhorado ou modificado é em tudo semelhante ao método de Euler tradicional, a única diferença é que este método utiliza uma média das inclinações em cada ponto para cada iteração, ou seja, tendo um x0 e um x1 este método calcula a inclinação em x0 a inclinação em x1 e consegue assim um resultado mais aproximado, este método é bastante parecido com o método de Euler melhorado, dando até as mesmas soluções que este.

### 2.2.1 Fórmulas

Para calcular o método de Euler melhorado ou modificado usamos as seguintes fórmulas:

Onde toma os valores obtidos através da discretização de t;

### 2.1.2 Algoritmo/Função

**Algoritmo:**

INPUT: f,a,b,n,y0

OUTPUT: y t= a:h:b;

y=zeros(n+1,1);

y(1)=y0;

for i=1:n

𝑦 ∗ (𝑖 + 1) = 𝑦(𝑖) + ℎ ∗ 𝑓(𝑡(𝑖), 𝑦(𝑖));

End

**Função:**

function y = N\_euler\_v02(f,a,b,n,y0) h=(b-a)/n; t= a:h:b; y=zeros(n+1,1); y(1)=y0; z(1)=y0; for i=1:n z(i+1) = y(i)+h\*f(t(i),y(i)); y(i+1,1) = y(i)+(h/2)\*(f(t(i),y(i))+ f(t(i+1),z(i+1))); end

## 2.3 Método de RK2

O método de Runge-Kutta de ordem 2 é um método numérico com alguma precisão, isto deve-se em muito à sua fórmula que considera para cada iteração dois valores denominados normalmente por “k” onde o primeiro é a inclinação no início do intervalo, o segundo é a inclinação no final do intervalo, assim fazendo uma “média” das inclinações obtém-se a inclinação para cada iteração, tornando este método eficiente, este método é bastante parecido com o método de Euler melhorado, dando até as mesmas soluções que este.

### 2.3.1 Fórmulas

### 2.3.2 Algoritmo/Função

**Algoritmo:**

INPUT: f,a,b,n,y0

OUTPUT: y t= a:h:b;

y=zeros(n+1,1);

y(1)=y0;

for i=1:n

𝑘1 = ℎ ∗ 𝑓(𝑡𝑖 , 𝑦𝑖 );

𝑘2 = ℎ ∗ 𝑓(𝑡𝑖+1, 𝑦𝑖 + 𝑘1 );

𝑦𝑖+1 = 𝑦𝑖 + 1 2 (𝑘1+𝑘2),𝑖 = 0,1, … , 𝑛 − 1

end

**Função:**

function y = N\_RK2(f,a,b,n,y0) h=(b-a)/n; t= a:h:b; y = zeros(n+1,1); y(1)=y0; for i=1:n k1=h\*f(t(i),y(i)); k2=h\*f(t(i+1),y(i)+k1); y(

## 2.4 Método de RK4

O método de Runge-Kutta de ordem 4 é o método numérico com mais precisão de todos os que estudamos em Análise Matemática 2, isto deve-se em muito à sua fórmula que considera para cada iteração quatro valores denominados normalmente por “k” onde o primeiro é a inclinação no início do intervalo, o segundo é a inclinação no ponto médio do intervalo usando a primeira inclinação, o terceiro é novamente a inclinação no ponto médio do intervalo mas, desta vez, utilizando a segunda inclinação e, finalmente, o quarto é a inclinação no final do intervalo, assim fazendo uma “média” das inclinações obtém-se a inclinação para cada iteração, tornando este método bastante eficiente.

### 2.4.1 Fórmulas

### 2.4.2 Algoritmo/Função

**Algoritmo:**

INPUT: f,a,b,n,y0

OUTPUT: y t= a:h:b;

y=zeros(n+1,1);

y(1)=y0;

for i=1:n

𝑘1 = ℎ ∗ 𝑓(𝑡𝑖 , 𝑦𝑖 );

𝑘2 = ℎ ∗ 𝑓 (𝑡𝑖 + ℎ 2 , 𝑦𝑖 + 1 2 𝑘1) ;

𝑘3 = ℎ ∗ 𝑓 (𝑡𝑖 + ℎ 2 , 𝑦𝑖 + 1 2 𝑘2) ;

𝑘4 = ℎ ∗ 𝑓(𝑡𝑖+1, 𝑦𝑖 + 𝑘3 );

End

**Função:**

## 2.5 Função ODE45 do Matlab

A função ODE45 pode resolver sistemas de equações da forma y'=f(t,y), com alguma precisão, esta função recebe como argumentos os parâmetros seguintes ode45(odefun,tspan,y0), onde odefun é a função f, o tspan é o intervalo [a,b] e o y0 é a condição inicial.

# 3. Exemplos de aplicação e teste dos métodos

## 3.1 Exercício 4 do um teste A de 2015/2016

### 3.1.1 PVI - Equação Diferencial de 1ª ordem e Condições Iniciais

• f(t,y)=y+t

• y(1)=1

• a=0

• b=3

• n=4

• h=(3-0)/4=0.75

## 3.2 Problema de aplicação

### 3.2.2 Exemplos de output - GUI com gráfico e tabela

» https://moodle.isec.pt/moodle/mod/page/view.php?id=69049

### 3.2.1 Modelação matemática do problema

### 3.2.2 Resolução através da aplicação criada

# 4. Conclusão

Com a realização deste projeto aprofundamos os nossos conhecimentos em MATLAB e conhecemos mais um pouco sobre a sua aplicação na resolução de problemas matemáticos entre outras utilidades. Com esta atividade ganhamos “prática” na utilização destas ferramentas, nomeadamente para a resolução de Problemas de Valor Inicial (PVI) utilizando o Método de Euler/Euler melhorado/RK2/RK4/ODE45. Na realização deste trabalho percecionamos que o MATLAB é pouco intuitivo e existência de pouca ajuda online, por vezes a que é encontrada é confusa e pouco util.